

Menelusuri Alur Penalaran Siswa dalam Membuktikan Aturan Sinus: Studi Kasus Kualitatif dalam Pembelajaran Berbasis Masalah

Nurul Izzah^{1*}, Sikky El Walida²

^{1,2}Universitas Islam Malang, Jawa Timur, Indonesia

*Corresponding Author: 22552072006@unisma.ac.id

ARTICLE INFO

Article history:

Received 28 Jan 2026

Revised 25 Jun 2026

Accepted 30 Jun 2026

Keywords:

Mathematical proof;

Reasoning paths;

Sine rule;

Problem-based learning

ABSTRACT

Mathematical proof plays an essential role in developing students' reasoning and higher-order thinking skills; however, secondary mathematics instruction often remains procedural, limiting meaningful reasoning development. This study explores students' reasoning paths in proving the sine rule through Problem-Based Learning. A qualitative case study was conducted in a trigonometry learning context using Problem-Based Learning. Data were collected through classroom observations, analysis of students' worksheets, and in-depth interviews, and analyzed thematically based on stages of mathematical proof. The results show that students' reasoning paths develop dynamically through three stages conjecturing, justifying, and concluding. During conjecturing, students formulate initial conjectures based on problem understanding and connections to trigonometric concepts. The justifying stage involves developing and validating conjectures through argumentation, representations, mathematical manipulations, and reasoning supported by social interaction. In concluding, students formulate the sine rule and reflect on the validity of the proof process. Overall, the findings indicate that Problem-Based Learning provides a supportive context for fostering meaningful mathematical proof reasoning.

© 2024 The Author(s)

Published by JRPM (Jurnal Review Pembelajaran Matematika)

This is an open-access article under CC BY-SA license

(<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>)

How to cite:

Izzah, N. & El Walida, S. (2026). Menelusuri Alur Penalaran Siswa dalam Membuktikan Aturan Sinus: Studi Kasus Kualitatif dalam Pembelajaran Berbasis Masalah. *JRPM (Jurnal Review Pembelajaran Matematika)*, 11(1), 100-112.

PENDAHULUAN

Matematika memiliki peran strategis dalam mengembangkan kemampuan berpikir tingkat tinggi (Higher-Order Thinking Skills/HOTS), seperti kemampuan menganalisis, mengevaluasi, dan membangun penalaran logis yang dibutuhkan dalam menghadapi tantangan abad ke-21 (Sivakumar & Boon, 2026). Oleh karena itu, pembelajaran matematika perlu diarahkan tidak hanya pada penguasaan prosedur dan perhitungan rutin,

tetapi juga pada pengembangan pemahaman konseptual, kemampuan justifikasi, dan konstruksi argumen matematis secara bermakna (OECD, 2019; Retnawati *et al.*, 2018). Namun, praktik pembelajaran matematika di sekolah menengah masih didominasi oleh pendekatan prosedural, di mana siswa cenderung menghafal rumus dan menerapkannya secara mekanis tanpa memahami dasar penalaran yang melandasinya (Sumarmo, U., & Nishitani, 2010)

Salah satu aspek penting dalam matematika yang berkontribusi langsung terhadap pengembangan HOTS adalah pembuktian matematis. Pembuktian berperan tidak hanya sebagai sarana verifikasi kebenaran, tetapi juga sebagai media untuk membangun pemahaman konseptual, mengaitkan berbagai representasi, serta melatih penalaran deduktif siswa (Stylianides *et al.*, 2024). Melalui aktivitas pembuktian, siswa didorong untuk menjelaskan alasan, menyusun hubungan logis, dan merefleksikan keabsahan argumen yang mereka bangun. Dengan demikian, keterlibatan siswa dalam proses pembuktian menjadi elemen penting dalam pembelajaran matematika yang berorientasi pada penalaran (Lessing & Ogbonnaya, 2026)

Meskipun memiliki peran yang krusial, pembuktian matematis masih sering dipersepsikan sebagai aktivitas yang abstrak dan sulit oleh siswa sekolah menengah. Dalam banyak konteks pembelajaran, pembuktian diperkenalkan secara terbatas atau bahkan diabaikan, sementara pembelajaran lebih difokuskan pada penyelesaian soal-soal aplikatif. Kondisi ini berdampak pada rendahnya kemampuan siswa dalam menjelaskan alasan matematis, membangun argumen, serta memahami keterkaitan antar konsep. Akibatnya, pemahaman siswa cenderung bersifat instrumental, yaitu siswa mengetahui cara menggunakan rumus tanpa memahami alasan dan makna keberlakuannya (Skemp, 2006; Teoh, 2025)

Trigonometri merupakan salah satu topik matematika sekolah menengah yang memiliki potensi besar untuk mengembangkan penalaran dan pembuktian matematis. Konsep-konsep trigonometri, termasuk aturan sinus, memiliki dasar geometris yang kuat dan dapat diturunkan melalui proses penalaran yang sistematis. Namun, dalam praktik pembelajaran, aturan sinus sering diajarkan sebagai rumus siap pakai tanpa melibatkan siswa dalam proses penurunan atau pembuktiannya. Pendekatan ini membatasi kesempatan siswa untuk membangun pemahaman konseptual dan mengembangkan kemampuan berpikir tingkat tinggi secara optimal (Wardhani & Argaswari., 2022)

Untuk mengatasi permasalahan tersebut, diperlukan pendekatan pembelajaran yang

mampu menggeser fokus dari penerapan prosedural menuju konstruksi penalaran matematis. Problem-Based Learning (PBL) merupakan pendekatan yang relevan karena menempatkan masalah sebagai titik awal pembelajaran dan mendorong siswa untuk secara aktif mengeksplorasi, mendiskusikan, serta membangun solusi melalui interaksi dan refleksi (Hmelo-silver & Barrows, 2008). Project-Based Learning (PBL) merupakan strategi pembelajaran yang mengorganisasikan proses pembelajaran matematika melalui aktivitas pemecahan masalah. Pendekatan ini memberikan ruang bagi siswa untuk mengembangkan kemampuan berpikir kritis, mengemukakan gagasan secara kreatif, serta berkomunikasi secara matematis dengan teman sebayanya (Rézio, Andrade, & Teodoro, 2022).

Namun demikian, sebagian besar penelitian terkait PBL masih berfokus pada hasil belajar secara kuantitatif, seperti peningkatan skor tes atau capaian HOTS. Kajian yang menelusuri secara mendalam proses penalaran siswa, khususnya dalam konteks pembuktian matematis melalui PBL, masih relatif terbatas (Rosyidah *et al*, 2021). Padahal, pemahaman terhadap proses berpikir siswa penting untuk mengungkap bagaimana siswa membangun makna, menghadapi kebingungan konseptual, serta mengembangkan argumen matematis secara bertahap (Lessing & Ogbonnaya, 2026)

Berdasarkan uraian tersebut, terdapat celah penelitian terkait minimnya studi kualitatif yang berfokus pada penelusuran lintasan penalaran atau alur proses berpikir yang ditempuh siswa dalam pembuktian matematis khususnya pada topik trigonometri. Oleh karena itu, penelitian ini bertujuan untuk menelusuri lintasan penalaran siswa atau alur proses berpikir siswa seperti langkah-langkah berpikir yang diambil siswa sejak memahami soal hingga mencapai kesimpulan, cara siswa menghubungkan konsep-konsep, memilih strategi yang digunakan, dan perubahan atau perkembangan pemikiran dalam proses pembuktian aturan sinus melalui model pembelajaran *Problem-Based Learning*. Penelitian ini menggunakan pendekatan kualitatif dengan desain studi kasus untuk mengungkap secara mendalam bagaimana siswa membangun, mengembangkan, dan memvalidasi penalaran matematis mereka. Penelitian ini diharapkan dapat memberikan kontribusi teoretis terhadap kajian pembuktian matematis berbasis proses serta implikasi praktis bagi pengembangan pembelajaran trigonometri yang berorientasi pada penalaran dan HOTS.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan pendekatan kualitatif dengan desain studi kasus untuk menelusuri secara mendalam alur penalaran siswa dalam proses pembuktian aturan sinus

melalui pembelajaran berbasis masalah (*Problem-Based Learning*). Pemilihan pendekatan kualitatif ini berangkat dari kebutuhan penelitian untuk memahami proses berpikir siswa secara utuh, bukan sekadar hasil akhir pembelajaran. Fokus utama penelitian diarahkan pada bagaimana siswa membangun dugaan awal (*conjecturing*), mengembangkan dan memvalidasi argumen matematis (*justifying*), hingga menarik kesimpulan pembuktian secara logis (*concluding*) selama proses pembelajaran berlangsung. Penalaran matematis dalam konteks pembuktian dipahami sebagai fenomena kognitif yang kompleks, dinamis, dan sangat bergantung pada konteks pembelajaran, sehingga tidak dapat direpresentasikan secara memadai melalui pengukuran kuantitatif semata (Creswell & Poth, 2024; Merriam & Tisdell, 2016).

Penelitian ini dilaksanakan pada Januari 2026 di salah satu Madrasah Aliyah Negeri di Kota Kediri, Jawa Timur. Pemilihan lokasi penelitian dilakukan secara purposif dengan mempertimbangkan kesesuaian konteks pembelajaran, khususnya penerapan Problem-Based Learning pada materi aturan sinus serta budaya akademik sekolah yang mendukung keterlibatan aktif siswa, diskusi kelas, dan pengembangan penalaran logis. Konteks pembelajaran tersebut dipandang relevan untuk mengamati secara langsung bagaimana tahapan penalaran pembuktian matematis siswa muncul dan berkembang dalam situasi pembelajaran yang autentik.

Subjek penelitian ini, terdiri atas enam siswa kelas XI yang dipilih menggunakan teknik purposive sampling. Pemilihan subjek didasarkan pada kriteria siswa yang aktif terlibat dalam pembelajaran PBL serta mampu mengomunikasikan proses berpikirnya secara lisan maupun tertulis. Selain itu, pemilihan siswa kelas XI didasarkan pada tuntutan kurikulum yang menekankan kemampuan penalaran deduktif, pembuktian matematis, dan refleksi terhadap proses berpikir pada materi trigonometri. Dengan demikian, siswa pada jenjang ini dinilai memiliki kesiapan kognitif untuk merefleksikan lintasan penalaran matematisnya secara lebih eksplisit (Pangaribuan et al., 2025)

Untuk menangkap proses penalaran tersebut secara mendalam, instrumen utama dalam penelitian ini adalah peneliti sendiri sebagai human instrument. Menurut Creswell & Poth (2024) dan Merriam & Tisdell (2016) human instrument berperan dalam mengamati, menafsirkan, dan memahami proses penalaran siswa secara langsung dalam konteks pembelajaran. Peran peneliti sebagai instrumen utama memungkinkan kepekaan terhadap dinamika berpikir siswa yang muncul selama proses pembuktian berlangsung. Untuk mendukung peran tersebut, digunakan tiga instrumen pendukung, yaitu Lembar Kerja

Peserta Didik (LKPD), lembar observasi, dan pedoman wawancara semi-terstruktur.

LKPD dirancang sebagai stimulus task untuk memunculkan dan merekam penalaran siswa dalam membuktikan aturan sinus melalui masalah kontekstual. Secara khusus, LKPD disusun untuk memfasilitasi munculnya tahapan pembuktian, mulai dari perumusan dugaan awal (*conjecturing*), pengembangan argumen dan penggunaan relasi matematis (*justifying*), hingga penarikan kesimpulan pembuktian (*concluding*). Dengan demikian, LKPD tidak hanya berfungsi sebagai tugas pembelajaran, tetapi juga sebagai artefak utama yang merepresentasikan lintasan penalaran siswa secara tertulis.

Selanjutnya, observasi dilakukan secara sistematis untuk menangkap proses penalaran siswa selama diskusi Problem-Based Learning. Indikator observasi dipertegas dan disusun secara eksplisit berdasarkan tahapan pembuktian matematis, yaitu: (1) *conjecturing*, yang mencakup kemampuan siswa memahami masalah, mengidentifikasi informasi yang relevan, serta merumuskan dugaan atau strategi awal pembuktian; (2) *justifying*, yang meliputi kemampuan siswa mengembangkan argumen logis, menggunakan konsep dan relasi trigonometri, serta memberikan alasan atau pembenaran terhadap setiap langkah pembuktian; dan (3) *concluding*, yang mencakup kemampuan siswa menyusun kesimpulan pembuktian secara koheren dan mengaitkannya kembali dengan dugaan awal. Indikator Observasi dan Kode Analisis Alur Penalaran Siswa dalam Pembuktian Aturan Sinus dapat dilihat pada tabel 1. berikut.

Tabel 1. Indikator Observasi dan Kode Analisis Lintasan Penalaran Siswa dalam Pembuktian Aturan Sinus

Tahapan Pembuktian	Fokus Observasi	Indikator Operasional	Kode Analisis
<i>Conjecturing</i>	Memahami dan memformulasikan dugaan awal	Siswa mengidentifikasi informasi yang diketahui dan ditanyakan dalam masalah kontekstual	C1
		Siswa mengaitkan masalah dengan konsep segitiga, sudut, dan perbandingan trigonometri	C2
		Siswa mengemukakan dugaan awal mengenai hubungan sisi dan sudut pada segitiga	C3
<i>Justifying</i>	Mengembangkan dan memvalidasi dugaan	Siswa menyusun argumen matematis untuk mendukung dugaan yang diajukan	J1
		Siswa menggunakan representasi (diagram, simbol, atau relasi matematis) secara logis	J2
		Siswa melakukan transformasi atau manipulasi matematis yang relevan (mis. luas segitiga, relasi sudut)	J3
		Siswa memberikan alasan atau justifikasi terhadap setiap langkah pembuktian	J4
<i>Concluding</i>	Menarik kesimpulan pembuktian	Siswa merumuskan kesimpulan akhir berupa aturan sinus secara eksplisit	K1
		Siswa mengaitkan kesimpulan dengan dugaan awal yang telah dibuat	K2
		Siswa merefleksikan keabsahan dan konsistensi proses pembuktian	K3

Observasi ini juga dilengkapi dengan catatan lapangan (field notes) untuk merekam dinamika interaksi, dialog matematis, serta pergeseran penalaran yang terjadi selama proses pembelajaran (Hmelo-Silver & Barrows, 2008; Miles et al., 2019).

Untuk memperdalam temuan observasi dan dokumen hasil tertulis, wawancara semi-terstruktur digunakan sebagai teknik pengumpulan data berikutnya. Wawancara difokuskan pada eksplorasi konstruksi pemahaman siswa terhadap pembuktian aturan sinus, termasuk alasan pemilihan strategi, makna yang diberikan terhadap langkah-langkah pembuktian, serta proses justifikasi dan penarikan kesimpulan yang mereka lakukan. Penggunaan wawancara semi-terstruktur memberikan fleksibilitas bagi peneliti untuk menelusuri lebih jauh aspek kognitif yang tidak sepenuhnya tampak dalam observasi maupun LKPD (Creswell & Poth, 2024).

Pengumpulan data dilakukan secara terpadu melalui observasi partisipatif selama pembelajaran PBL berlangsung, wawancara mendalam setelah kegiatan pembelajaran, serta dokumentasi hasil pengerjaan LKPD sebagai artefak utama penalaran siswa. Keterpaduan teknik pengumpulan data ini dimaksudkan untuk memperoleh gambaran lintasan penalaran siswa yang utuh dari berbagai sumber data.

Sejalan dengan tujuan penelitian, analisis data dilakukan secara induktif dengan pendekatan tematik menggunakan model analisis interaktif Miles, Huberman, & Saldaña yang meliputi tahap reduksi data, penyajian data, dan penarikan kesimpulan (Miles, Huberman, & Saldaña, 2019). Pada tahap reduksi data, dilakukan proses coding terhadap data observasi, wawancara, dan LKPD dengan mengelompokkan unit-unit data berdasarkan tahapan penalaran pembuktian, yaitu conjecturing, justifying, dan concluding. Proses coding ini menghasilkan kategori dan subkategori yang merepresentasikan alur penalaran siswa secara sistematis.

Tabel 2. Pemetaan Analisis Data Berdasarkan Model Miles, Huberman, & Saldaña (2019)

Tahap Analisis	Aktivitas Analisis	Output
Reduksi data	Coding C–J–K pada observasi, LKPD, dan wawancara	Kategori lintasan penalaran
Penyajian data	Narasi tematik per tahap pembuktian	Pola alur penalaran siswa
Penarikan kesimpulan	Triangulasi dan verifikasi antar sumber data	Temuan konseptual

Selanjutnya, pada tahap penyajian data, hasil coding disajikan dalam bentuk matriks, narasi tematik, dan kutipan data yang menggambarkan lintasan penalaran masing-masing subjek penelitian. Tahap penarikan kesimpulan dilakukan dengan mengidentifikasi pola, konsistensi, dan variasi alur penalaran siswa dalam membuktikan aturan sinus. Pemetaan

analisis data menurut miles dan hubberman pada konteks penelitian ini dapat dilihat pada Tabel 2.

HASIL DAN PEMBAHASAN

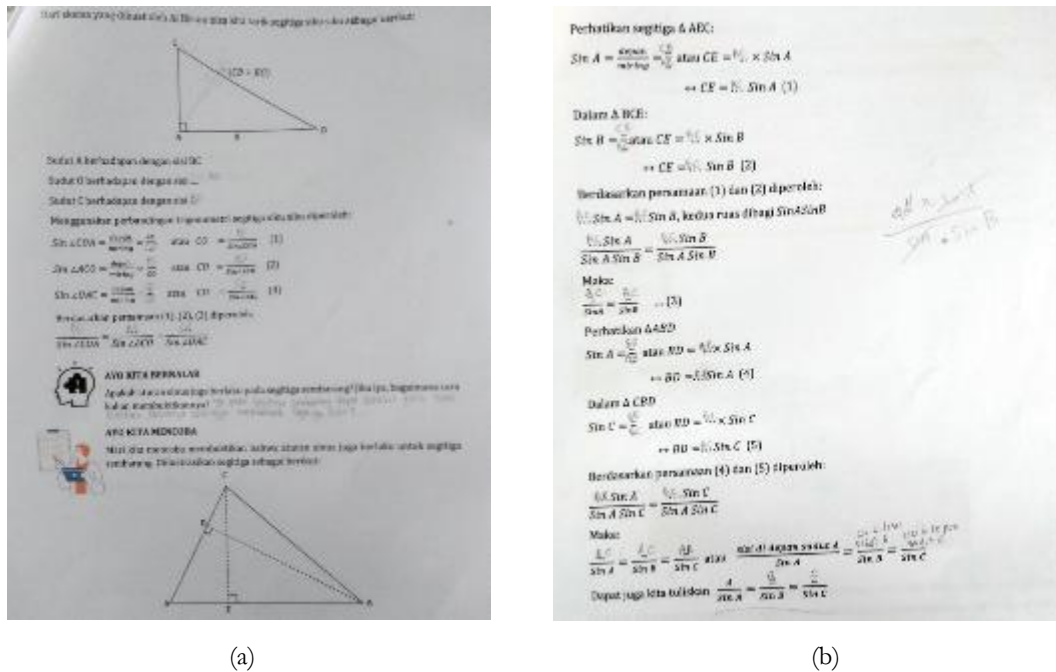
Bagian ini menyajikan hasil analisis tematik terhadap data observasi pembelajaran, dokumen hasil kerja siswa berupa LKPD, dan wawancara siswa untuk menelusuri lintasan penalaran siswa dalam membuktikan aturan sinus melalui pembelajaran berbasis masalah. Penyajian hasil dan pembahasan diorganisasikan berdasarkan tahapan pembuktian matematis, yaitu conjecturing, justifying, dan concluding, dengan merujuk secara langsung pada indikator operasional dan kode analisis (C1–C3, J1–J4, K1–K3).

Hasil observasi menunjukkan bahwa pada tahap awal pembelajaran (conjecturing), siswa memulai proses pembuktian dengan mengidentifikasi informasi yang diketahui dan apa yang perlu dibuktikan dalam masalah kontekstual yang disajikan pada LKPD (C1). Siswa menandai sisi dan sudut pada gambar segitiga, menggambar ulang sketsa dengan keterangan yang lebih jelas, serta mendiskusikan hubungan antara sudut dan sisi yang berhadapan. Aktivitas ini menunjukkan bahwa siswa membangun pemahaman situasional sebagai dasar awal penalaran pembuktian. Kesamaan alur berpikir siswa dalam tahap conjecturing menunjukkan bahwa sebagian besar siswa mengikuti pola penyelesaian yang seragam, yang kemungkinan dipengaruhi oleh struktur LKPD yang cukup terarah. Meskipun hal ini menunjukkan adanya pemahaman awal yang baik terhadap konsep, namun keberagaman strategi pemecahan masalah belum terlihat secara optimal. Oleh karena itu, diperlukan pengembangan aktivitas yang lebih terbuka untuk mendorong variasi penalaran dan konstruksi ide secara mandiri.

Selanjutnya, siswa mengaitkan permasalahan yang dihadapi dengan konsep-konsep segitiga, sudut, dan perbandingan trigonometri yang telah dipelajari sebelumnya (C2). Penggunaan sketsa segitiga dan istilah trigonometri dasar berfungsi sebagai jembatan antara konteks masalah dan struktur matematis yang akan dibuktikan. Representasi visual pada tahap ini membantu siswa memformulasikan arah penalaran sebelum memasuki pembuktian formal.

Berdasarkan pemahaman tersebut, siswa kemudian mengemukakan dugaan awal mengenai hubungan antara panjang sisi segitiga dan sinus sudut yang berhadapan (C3). Analisis LKPD menunjukkan bahwa dugaan ini masih bersifat intuitif dan dinyatakan secara informal, umumnya berangkat dari analogi dengan perbandingan trigonometri pada

segitiga siku-siku. Wawancara mengonfirmasi bahwa siswa menyadari dugaan yang mereka ajukan bersifat sementara dan perlu divalidasi melalui proses pembuktian selanjutnya. Temuan ini menegaskan bahwa conjecturing (C1–C3) berfungsi sebagai fase eksploratif awal dalam pembuktian matematis.



Gambar 1 (a) dan (b). Hasil Lembar Kerja Peserta Didik

Tahap justifying merupakan fase paling intens dalam lintasan penalaran siswa. Pada tahap ini, siswa mulai menyusun argumen matematis untuk mendukung dugaan awal yang telah diajukan (J1). Berdasarkan observasi kelas, siswa membentuk segitiga bantu, menarik garis tinggi, dan mendiskusikan strategi pembuktian secara kolaboratif untuk memvalidasi hubungan yang diduga.

Dalam mengembangkan argumen tersebut, siswa memanfaatkan berbagai representasi matematis, baik visual maupun simbolik, seperti diagram segitiga, notasi sudut, serta relasi trigonometri (J2). Representasi ini digunakan secara logis untuk mengekspresikan hubungan antar unsur segitiga dan memperjelas alur pembuktian. Temuan ini menunjukkan bahwa representasi matematis berperan sebagai alat utama dalam proses justifikasi.

Analisis terhadap LKPD memperlihatkan bahwa siswa melakukan manipulasi matematis yang relevan, seperti menyamakan dua ekspresi panjang sisi yang diperoleh dari konstruksi segitiga yang berbeda (J3). Manipulasi ini didasarkan pada kesadaran bahwa tinggi segitiga yang digunakan merupakan elemen yang sama sehingga dapat dijadikan dasar

perbandingan. Namun demikian, kualitas justifikasi yang menyertai manipulasi tersebut bervariasi.

Sebagian siswa mampu memberikan alasan matematis yang eksplisit untuk setiap langkah pembuktian yang dilakukan (J4), sedangkan siswa lainnya masih menunjukkan lompatan logika tanpa penjelasan yang memadai. Hasil wawancara menunjukkan bahwa siswa dengan justifikasi yang lebih kuat secara sadar berupaya memastikan bahwa setiap langkah memiliki dasar matematis yang dapat dipertanggungjawabkan. Sebaliknya, siswa dengan justifikasi yang kurang eksplisit mengandalkan diskusi kelompok untuk memperjelas pemahaman mereka. Temuan ini menunjukkan bahwa kualitas justifying (J1–J4) tampak dibentuk melalui interaksi sosial, di mana dialog dan pertukaran argumen antar siswa berperan dalam memperjelas, menguji, dan memvalidasi penalaran matematis, sehingga pembuktian dapat dipahami sebagai praktik sosial-kognitif yang melampaui aktivitas individual (Gillies, 2017).

Pada tahap *concluding*, sebagian besar siswa mampu merumuskan kesimpulan akhir berupa aturan sinus secara eksplisit sebagai hubungan perbandingan antara panjang sisi segitiga dan sinus sudut yang berhadapan (K1). Kesimpulan ini merupakan hasil generalisasi dari argumen matematis yang telah dikembangkan dan divalidasi pada tahap justifying.

Lebih lanjut, siswa dengan lintasan penalaran yang lebih utuh mampu mengaitkan kesimpulan akhir tersebut dengan dugaan awal yang dibuat pada tahap *conjecturing* (K2). Mereka menyadari bahwa dugaan intuitif yang diajukan sebelumnya telah tervalidasi melalui proses pembuktian yang sistematis. Sebaliknya, beberapa siswa menyusun kesimpulan secara lebih prosedural, dengan keyakinan bahwa hasil yang diperoleh benar karena sesuai dengan rumus yang terdapat dalam buku teks.

Refleksi terhadap keabsahan dan konsistensi proses pembuktian (K3) terutama muncul pada siswa yang menunjukkan justifikasi yang konsisten pada tahap sebelumnya. Siswa menyadari bahwa kesalahan pada satu langkah pembuktian dapat memengaruhi kebenaran kesimpulan akhir. Temuan ini menunjukkan bahwa kualitas tahap *concluding* (K1–K3) sangat dipengaruhi oleh kedalaman proses justifying yang telah dilalui.

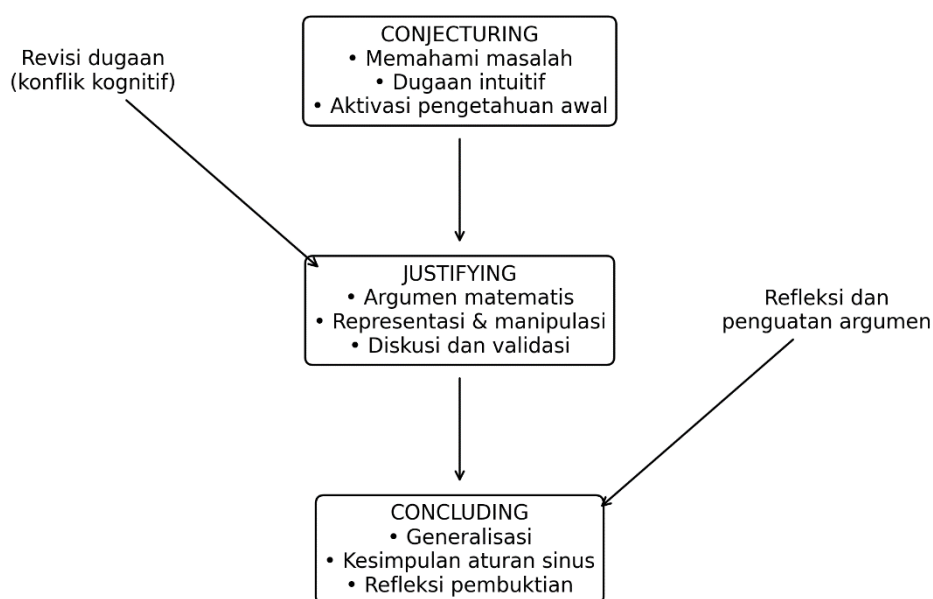
Secara keseluruhan, lintasan penalaran siswa dalam membuktikan aturan sinus berkembang melalui tahapan *conjecturing* (C1–C3), *justifying* (J1–J4), dan *concluding* (K1–K3) yang bersifat dinamis dan tidak linear. Siswa kerap bergerak bolak-balik antara dugaan awal dan justifikasi ketika menghadapi konflik kognitif, kemudian merevisi argumen

sebelum mencapai kesimpulan akhir. Pola ini sejalan dengan pandangan Miyazaki et al (2019) bahwa pembuktian matematis di tingkat sekolah menengah melibatkan proses eksplorasi, revisi, dan refleksi yang berkelanjutan. Matriks display lintasan penalaran pembuktian aturan sinus dapat dilihat pada tabel 3 berikut.

Tabel 3. Pemetaan Analisis Data Berdasarkan Model Miles, Huberman, & Saldaña (2019)

Tahap & Kode	Fokus Penalaran	Bukti Data Utama (Excerpt)	Pola Temuan
Conjecturing C1–C2	Memahami masalah dan mengaitkan konsep awal	Observasi/LKPD: “Siswa menandai sisi dan sudut pada gambar segitiga lalu menggambar ulang dengan keterangan sudut.” Wawancara: “ <i>Kami coba pahami dulu segitiganya, sudut mana yang berhadapan dengan sisi.</i> ”	Siswa membangun pemahaman situasional melalui identifikasi informasi dan representasi visual sebelum pembuktian formal
Conjecturing C3	Merumuskan dugaan awal	LKPD: Dugaan tertulis: “ <i>Kemungkinan panjang sisi berbanding dengan sinus sudut di depannya.</i> ” Wawancara: “ <i>Ini masih tebakan, tapi mirip seperti di segitiga siku-siku.</i> ”	Dugaan bersifat intuitif dan sementara, berangkat dari pengetahuan trigonometri sebelumnya
Justifying J1–J2	Mengembangkan argumen dengan representasi	Observasi: Siswa menarik tinggi segitiga dan mendiskusikan dua segitiga siku-siku yang terbentuk LKPD: Diagram segitiga bantu disertai relasi sinus	Representasi visual dan simbolik menjadi alat utama untuk menguji dugaan
Justifying J3–J4	Manipulasi dan justifikasi matematis	LKPD: Penyamaan dua ekspresi panjang sisi dari konstruksi berbeda Wawancara: “ <i>Kami samakan karena itu tinggi yang sama, jadi boleh dibandingkan.</i> ”	Kualitas justifikasi bervariasi; siswa dengan penalaran kuat memberi alasan eksplisit pada tiap langkah
Concluding K1–K2	Merumuskan dan mengaitkan kesimpulan	LKPD: Rumus aturan sinus dituliskan lengkap Wawancara: “ <i>Dari awal memang menduga begitu, dan akhirnya terbukti.</i> ”	Kesimpulan merupakan generalisasi dari dugaan awal yang tervalidasi
Concluding K3	Refleksi proses pembuktian	Wawancara: “ <i>Kalau satu langkah salah, rumusnya tidak bisa muncul.</i> ”	Refleksi muncul terutama pada siswa dengan justifikasi yang konsisten

Berbeda dari studi kuantitatif yang menekankan capaian hasil belajar, penelitian ini memberikan kontribusi prosedural dengan menampilkan bagaimana penalaran pembuktian matematis siswa terbentuk dan berkembang dalam konteks trigonometri melalui pembelajaran berbasis masalah. Temuan ini menegaskan pentingnya menempatkan pembuktian sebagai proses berpikir yang bermakna dan berorientasi pada penalaran, bukan sebagai penyampaian rumus jadi. Dengan demikian, Problem-Based Learning memiliki potensi pedagogis yang kuat untuk mendukung pengembangan penalaran matematis dan kemampuan berpikir tingkat tinggi siswa. Diagram alur penalaran siswa dapat dilihat pada Gambar 2. berikut.



Gambar 2. Model Tahapan Lintasan Penalaran Pembuktian Matematis Siswa

Gambar tersebut merepresentasikan lintasan penalaran pembuktian matematis siswa yang bersifat dinamis (lintasan berpikir), yang meliputi tiga tahap utama, yaitu *conjecturing* (memahami masalah, membuat dugaan dan aktivasi pengetahuan awal), *justifying* (menyusun argument matematis melalui representasi, manipulasi, serta diskusi dan validasi) dan *concluding* (melakukan generalisasi, menarik Kesimpulan, serta refleksi pembuktian). Proses ini bersifat dinamis, di mana siswa tidak selalu bergerak secara linear, tetapi dapat kembali ke tahap sebelumnya untuk merevisi dugaan atau memperkuat argumen.

SIMPULAN DAN SARAN

Penelitian ini menunjukkan bahwa lintasan penalaran siswa dalam membuktikan aturan sinus melalui pembelajaran berbasis masalah berkembang melalui tiga tahapan utama, yaitu *conjecturing*, *justifying*, dan *concluding* yang bersifat dinamis dan tidak selalu linear. Pada tahap *conjecturing*, siswa membangun pemahaman situasional dan mengemukakan dugaan awal berdasarkan identifikasi informasi serta keterkaitan konsep trigonometri. Tahap *justifying* menjadi fase paling kompleks, di mana siswa mengembangkan dan memvalidasi dugaan melalui penggunaan representasi, manipulasi matematis, dan pemberian alasan, dengan kualitas justifikasi yang dipengaruhi oleh interaksi sosial dalam diskusi kelompok. Selanjutnya, pada tahap *concluding*, siswa merumuskan kesimpulan pembuktian berupa aturan sinus, mengaitkannya dengan dugaan awal, serta merefleksikan keabsahan proses pembuktian yang telah dilakukan. Temuan ini menegaskan bahwa

pembuktian matematis tidak sekadar berorientasi pada hasil akhir berupa rumus, melainkan merupakan proses penalaran yang melibatkan eksplorasi, validasi argumen, dan refleksi. Dengan demikian, pembelajaran berbasis masalah memberikan konteks yang kondusif bagi siswa untuk mengembangkan penalaran pembuktian matematis secara lebih bermakna, khususnya pada materi trigonometri.

Berdasarkan temuan penelitian, pembelajaran matematika, khususnya pada topik trigonometri, disarankan untuk memberi ruang yang lebih luas bagi siswa dalam membangun dugaan, mengembangkan argumen, dan merefleksikan proses pembuktian melalui aktivitas berbasis masalah. Guru dapat merancang tugas dan LKPD yang tidak hanya menuntut penerapan rumus, tetapi juga memfasilitasi diskusi, penggunaan representasi, serta justifikasi langkah-langkah matematis secara eksplisit. Selain itu, penelitian selanjutnya dapat memperluas kajian lintasan penalaran pembuktian matematis pada konteks materi lain atau melibatkan subjek yang lebih beragam untuk memperoleh gambaran yang lebih komprehensif.

DAFTAR RUJUKAN

- Creswell, J. W., & Poth, C. N. (2024). *Qualitative inquiry and research design: Choosing among five approaches* (5th ed.). SAGE Publications.
- Gillies, R. M. (2019). Promoting academically productive student dialogue during collaborative learning. *International Journal of Educational Research*, 97, 200-209. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2017.07.014>
- Hmelo-Silver, C. E., & Barrows, H. S. (2008). Facilitating Collaborative Knowledge Building. *Cognition and Instruction*, 26(1), 48–94. <https://doi.org/10.1080/07370000701798495>.
- Lessing, M. J., Ogbonnaya, U. I. Reasoning and proof in mathematics education: a systematic literature review. *Discov Educ* 5, 31 (2026). <https://doi.org/10.1007/s44217-025-01016-1>
- Merriam, S. B., & Tisdell, E. J. (2016). *Qualitative Research: A Guide to Design and Implementation*. United States of America: Jossey-Bass.
- Miles, M. B., Huberman, A. M., & Saldaña, J. (2019). *Qualitative data analysis: A methods sourcebook* (4th ed.). SAGE Publications.
- Miyazaki M, Nagata J, Chino K, Sasa H, Fujita T, Komatsu K and Shimizu S (2019) Curriculum Development for Explorative Proving in Lower Secondary School Geometry: Focusing on the Levels of Planning and Constructing a Proof. *Front. Educ.* 4:31. doi: 10.3389/feduc.2019.00031
- OECD. (2019). *PISA 2018 results: What students know and can do* (Vol. 1). OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/5f07c754-en>
- Pangaribuan, F., Sidabutar, R., & Darmayanti, R. (2025). Exploring high school students'

- 3D geometry problem-solving: Role of cognitive style and mathematical ability. (2025). *Al-Jabar : Jurnal Pendidikan Matematika*, 16(1), 363-376. <https://doi.org/10.24042/ajpm.v16i1.24361>
- Retnawati, H., Djidu, H., Kartianom, Apino, E., & Anazifa, R. D. (2018). Teachers' knowledge about higher-order thinking skills and its learning strategies. *Problems of Education in the 21st Century*, 76(2), 215–230.
- Rézio, S., Andrade, M. P., & Teodoro, M. F. (2022). Problem-Based Learning and Applied Mathematics. *Mathematics*, 10(16), 2862. <https://doi.org/10.3390/math10162862>
- Rosyidah, A. N. K. *et al.* (2021). Internalization Process of Reasoning and Proof Standards for Elementary School Teachers in Mathematics Learning. *Aksioma: Jurnal Program Studi Pendidikan Matematika*, 10(1), 423–434. <https://doi.org/10.24127/ajpm.v10i1.3258>
- Sivakumar, K., & Boon, M. (2026). A preliminary higher order thinking skills (HOTS) framework for interdisciplinary problem solving and scientific research (IDPSSR) in engineering science education. *European Journal of Engineering Education*, 1–34. <https://doi.org/10.1080/03043797.2025.2609749>
- Skemp, R. R. (2006). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 12(2), 88-95. <https://doi.org/10.5951/MTMS.12.2.0088>
- Stylianides, G.J., Stylianides, A.J. & Moutsios-Rentzos, A. (2024). Proof and proving in school and university mathematics education research: a systematic review. *ZDM – Mathematics Education*, 56(1), 47–59. <https://doi.org/10.1007/s11858-023-01518-y>
- Sumarmo, U., & Nishitani, I. (2010). High Level Mathematical Thinking: Experiments with High School and Under Graduate Students using Various Approaches and Strategies. *Science Reports of the Faculty of Education*, 58, 9–22.
- Teoh, S. H., Rahmawati, Parmjit, S., & Retnawati, H. (2025). Exploring Mathematical Reasoning and Proof with Indonesian Senior High School Students. *Malaysian Journal of Mathematical Sciences*, 19(3), 837–855. <https://doi.org/10.47836/mjms.19.3.04>
- Wardhani, T. A. W., & Argaswari, D. P. A. D. (2022). High school students' error in solving word problem of trigonometry based on Newman error hierarchical model. *Infinity*, 11(1), 87-102. <https://doi.org/10.22460/infinity.v11i1.p87-102>